Sistemi linearnih jednačina

Neka su $a_{ij}, b_i \ (i = 1,...,m; j = 1,...,n)$ realne konstante. Tada je

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih $x_1,...,x_n$.

Ako je $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, sistem (*) zovemo *homogenim*, a u suprotnom kažemo da je taj sistem *nehomogeni*.

Metod determinanti

Ako je $m = n$ u sistemu (*), taj sistem možemo rješavati metodom determinante. Sa D označimo determinantu sistema čiji su elementi koeficijenti uz nepoznate, tj. $D = |a_{ij}|$. Sa $D_k (k = 1,...,n)$ označimo determinantu koja se dobije kada k – tu kolonu determinante D zamijenimo elementima $b_1,...,b_n$. Tada vrijedi sljedeće:

1^0 Ako je $D \neq 0$, tada sistem ima tačno jedno rješenje: $x_k = \frac{D_k}{D}(k = 1,...,n)$.

2^0 Ako je $D = 0$ i $D_k \neq 0$ za bar jedno $k \in \{1,...,n\}$, sistem nema rješenja.

3^0 Ako je $D = D_k = 0(k = 1,...,n)$, potrebna su dalja ispitivanja.

1. Riješiti sistem:

$$3x + 4y + 2z = 5$$
$$5x - 6y - 4z = -3$$
$$-4x + 5y + 3z = 1$$

Rješenje:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-18 + 20) - 4(15 - 16) + 2(25 - 24) = 6 + 4 + 2 = 12$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 5(-18+20) - 4(-9+4) + 2(-15+6) = 10 + 20 - 18 = 12$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-9+4) - 5(15-16) + 2(5-12) = -15 + 5 - 14 = -24$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-6+15) - 4(5-12) + 5(25-24) = 27 + 28 + 5 = 60$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{12}{12} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-24}{12} = -2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{60}{12} = 5$$

Rješenje: $(1, -2, 5)$

2. Diskutovati rješenje sistema za razne vrijednosti parametra:

$$x + y + z = 6$$
$$ax + 4y + z = 5$$
$$6x + (a+2)y + 2z = 13$$

Rješenje:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 4 & 1 \\ 6 & a+2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 4-a & 1-a \\ 6 & a-4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-a & 1-a \\ a-4 & -4 \end{vmatrix} = -4(4-a) - (a-4)(1-a)$$

$$= 4(a-4) - (a-4)(1-a) = (a-4)(4-1+a) = (a-4)(3+a)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}6&1&1\\5&4&1\\13&a+2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&1&1\\-1&3&0\\1&a&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&3\\1&a\end{vmatrix}=-a-3=-(a+3)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1&6&1\\a&5&1\\6&13&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&6&1\\a-1&-1&0\\4&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-1&-1\\4&1\end{vmatrix}=a-1+4=a+3$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1&1&6\\a&4&5\\6&a+2&13\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&4-a&5-6a\\6&a-4&-23\end{vmatrix}=-92+23a-5a+20+6a^2-24a$$

$$=6a^2-6a-72=6(a-4)(a+3)$$

I Ako je determinanta sistema različita od 0 onda je sistem saglasan i određen, tj. ima tačno jedno rješenje. U našem zadatku determinanta sistema će biti različita od nule ako je $a\neq 4$ i ako je $a\neq -3$. Naime, $D=(a-4)(3+a)\neq 0 \Rightarrow a\neq 4, a\neq -3$. Dakle, za $\forall a\in\mathbb{R}\setminus\{-3,4\}$ naš sistem jednačina ima jedno rješenje i to rješenje iznosi:

$$x=\frac{-(a+3)}{(a-4)(a+3)}=\frac{-1}{a-4}=\frac{1}{4-a}$$

$$y=\frac{(a+3)}{(a-4)(a+3)}=\frac{1}{a-4}$$

$$z=\frac{6(a-4)(a+3)}{(a-4)(a+3)}=6$$

II Ako je barem jedna od determinanti D_x, D_y, D_z različita od nule i $D=0$, onda sistem nema rješenja.U našem zadatku za $a=4$ imamo taj slučaj.

$a=4 \Rightarrow D=0, D_x=-7, D_y=7, D_z=0$, pa je sistem nemoguć.

III Ako je $D=D_x=D_y=D_z=0$ onda mogu nastupiti dva slučaja: da sistem ima beskonačno rješenja ili da nema nijedno rješenje. Da bi zaključili da li je sistem neodređen, odnosno nesaglasan moramo vršiti dodatna ispitivanja.

U našem zadatku za $a=-3$ imamo da su sve pomenute determinante jednake nuli, tj. $a=-3 \Rightarrow D=D_x=D_y=D_z=0$. Iz narednih razmatranja vidjećemo da je naš sistem neodređen ukoliko je $a=-3$. Uvrstimo $a=-3$ u dati sistem jednačina. Dobićemo:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=6\\ -3x+4y+z&=5\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=6-z\\ -3x+4y&=5-z\end{aligned}\right\}$$

$$-6x-y+2z=13$$

Riješimo sistem od prve dvije jednčine po x i y.

$$\begin{aligned} x+y&=6-z\\ \underline{-3x+4y}&\underline{=5-z}\end{aligned}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 4\end{vmatrix}=4+3=7$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}6-z & 1\\ 5-z & 4\end{vmatrix}=4(6-z)-(5-z)=19-3z$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 6-z\\ -3 & 5-z\end{vmatrix}=5-z+3(6-z)=23-4z$$

$$Rješenje:\left(\frac{19-3z}{7},\frac{23-4z}{7},z\right),z\in R$$

Provjerimo da li ovo rješenje zadovoljava treću jednačinu:

$$6\cdot\frac{19-3z}{7}-\frac{23-4z}{7}+2z=13$$

$$\Rightarrow 114-18z-23+4z+14z=91$$

$$\Rightarrow 0\cdot z=0$$

Posljednja jednakost vrijedi za $\forall z\in\mathbb{R}$, pa sistem ima beskonačno mnogo rješenja, ako je $a=-3$.

3. Diskutovati rješenja sistema jednačina za razne vrijednosti parametara:

$$\begin{aligned} ax+4y+z&=0\\ 2y-3z&=1\\ 2x\qquad -bz&=-2\end{aligned}$$

Rješenje:

$$D=\begin{vmatrix}a & 4 & 1\\ 0 & 2 & -3\\ 2 & 0 & -b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0 & 7\\ 0 & 2 & -3\\ 2 & 0 & -b\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}a & 7\\ 2 & -b\end{vmatrix}=2(-ab-14)=-2(ab+14)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ -2 & 0 & -b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & 3 & -3\\ 0 & 4 & -6-b\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 4 & -6-b\end{vmatrix}=24+4b+4=28+4b=4(7+b)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 2 & -2 & -b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 2 & 0 & -6-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 1\\ 2 & -6-b\end{vmatrix}=-6a-ab-2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4a-8) = -4(a-2)$$

I $\quad ab \neq -14 \quad$ sistem je saglasan (ima tačno jedno rješenje).

$$x = \frac{-2(b+7)}{ab+14},\ y = \frac{6a+ab+2}{2(ab+14)},\ z = \frac{2(a-2)}{ab+14}.$$

II $\quad ab = 14$

$$D_x = 0 \Rightarrow b+7=0 \Rightarrow b=-7 \Rightarrow a=2$$
$$D_y = 0 \Rightarrow -ab-6a-2=0 \Rightarrow 14-6a-2=0 \Rightarrow 6a=12 \Rightarrow a=2 \Rightarrow b=-7$$
$$D_z = 0 \Rightarrow a-2=0 \Rightarrow a=2 \Rightarrow b=-7$$

II.1. $a=2, b=-7 \Rightarrow D = D_x = D_y = D_z = 0$ Pokazaćemo da je u ovom slučaju sistem neodređen, tj. ima beskonačno rješenja. Uvrstimo $a=2$ i $b=-7$ u dati sistem jednačina:

$$(*)\quad \begin{aligned} 2x+4y+z&=0 \\ 2y-3z&=1 \\ \underline{2x+7z}&\underline{=-2} \end{aligned} \quad \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Ako drugu jednačinu pomnožimo sa brojem dva, a zatim je saberemo sa trećom jednačinom dobićemo prvu jednačinu, dakle sistem (*) se svodi na sistem od dvije jednačine.

Izeberimo jednu subdeterminantu različitu od nule:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

pa uzimajući $z \in \mathbb{R}$ proizvoljno imamo:

$$2y = 1+3z$$
$$\underline{2x = -2-7z}$$
$$x = \frac{-2-7z}{2},\ y = \frac{1+3z}{2}$$

Uređene trojke $\left(\frac{-2-7z}{2}, \frac{1+3z}{2}, z\right), z \in \mathbb{R}$ su rješenja sistema.

II.2. $\quad a \neq 2$ ili $b \neq -7 \Rightarrow D = 0, D_x \neq 0, D_y \neq 0, D_z \neq 0 \quad$ - sistem je nemoguć.